• FOLHA Nº 02 – GABARITO COMENTADO •

1) Seja A = 15p + 7. Como $\frac{A}{3}=\frac{15p+7}{3}=5p+\frac{7}{3}$, concluímos que o resto da divisão de A por 3 é igual ao resto da divisão de 7 por 3, ou seja, 1. De forma análoga, o resto da divisão de A por 5 é o mesmo que o da divisão de 7 por 5, ou seja, igual a 2. A soma desses restos é igual a 1 + 2 = 3.

OPÇÃO B

2) Como $\frac{100}{100-n}-\frac{n}{100-n}=1$, segue que se $\frac{n}{100-n}$ é inteiro então $\frac{100}{100-n}$ também é inteiro. Assim basta procurarmos pelos divisores inteiros de 100 pois para cada divisor d, teremos n = 100 – d como solução. O número 100 possui 18 divisores inteiros.

OPÇÃO D

3) Quando Ana andar 3/4 da escada, Beatriz terá andado 1/4 da mesma. Isso significa que Ana é três vezes mais rápida para descer do que Beatriz para subir. Quando Ana andar mais 1/4 da escada e terminar, Beatriz terá andado mais um terço disso, que é 1/12. Assim, Beatriz andou 4/12 da escada, então ainda terá que subir 8/12 = 2/3.

OPÇÃO E

4) $S_1=1+2+3+...+10=55$

$S_2=2+4+6+...+20=2(1+2+3+...+10)=2S_1$

$S_3=3+6+9+...+30=3(1+2+3+...+10)=3S_1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$S_{10}=10+20+30+...+100=10(1+2+3+...+10)=10S_1$

Logo $S_1+S_2+S_3+...+S_{10}=S_1+2S_1+3S_1+...+10S_1=(1+2+3+...+10)S_1=S_1\cdot S_1=55^2=3025.$

OPÇÃO B

5) Seja x o tempo que o segundo relógio voltou no tempo. Então queremos resolver a congruência 2x ≡ – x (mod 24) ⇒ 0 ≡ (mod 8). O menor inteiro positivo que satisfaz essa congruência é 8. Quando o segundo relógio tiver voltado 8 horas no tempo (e portanto estará marcando 05:00), a hora certa será 13:00 + 8:00 = 21:00.

OPÇÃO E

6) A soma dos dígitos dos bilhetes é no mínimo 1 e no máximo 27. Para as somas 1 e 27 existem apenas dois bilhetes, enquanto que para qualquer outro valor existem pelo menos três bilhetes. Então retirando 1 + 1 + 2 x (27 – 2) +1 = 53 iremos escolher pelo menos três números com mesma soma.

OPÇÃO D

7) O critério de divisibilidade por 11 nos diz que se o número 33N possui todos os seus algarismos iguais e é divisível por 11, então ele deve possuir um número par da algarismos. O critério de divisibilidade por 3 também nos diz que a soma dos algarismos deve ser múltipla de 3 e isso obriga que a quantidade de algarismos 7 seja divisível por 3. O menor número que cumpre essas condições é 777777, ou seja, N = 777777/33 = 23569.

OPÇÃO D

8) Seja x a idade de Alex. Logo, (x – 55)(x + 55)= p3, onde p é primo. Temos então, duas possibilidades:

I) $\begin{cases} x-55=1 \\ x+55=p^3 \end{cases}$

Nesse caso teríamos x = 56 e p = 111, absurdo, pois 111 não é primo.

II) $\begin{cases} x-55=p \\ x+55=p^2 \end{cases}$

Com isso, 110 = p2 – p = p(p – 1) = 11. 10. E assim teremos p = 11 e x = 66. Logo, a idade de Alex é 66 anos.

OPÇÃO C

9) Analisando a equação módulo 5, obtemos $4\cdot 3^a \equiv 1(mod\,5) \Leftrightarrow 3^a \equiv 4(mod\,5)$.

Mas os valores de são periódicos de período 4:

a	0	1	2	3	4	5	6	7
3^a **mod 5**	1	3	4	2	1	3	4	2

Assim, concluímos que $3^a \equiv 4(mod\,5) \Leftrightarrow a = 2+4t$ para $t \in$ N

Agora, analisando a equação módulo 3, obtemos $11+5^b \equiv 0(mod\,3) \Leftrightarrow (-1)^b \equiv 1(mod\,3)$ o que ocorre se, e só se, b é par.

Portanto a e b são ambos pares, digamos a= 2c e b = 2d para dois inteiros positivos c, d. Assim,

$$4\cdot 3^a = 11+5^b \Leftrightarrow \left(2\cdot 3^c\right)^2 - 5^{2d} = 11 \Leftrightarrow \left(2\cdot 3^c - 5^d\right)\left(2\cdot 3^c + 5^d\right) = 11 \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 2\cdot 3^c - 5^d = 1 \\ 2\cdot 3^c + 5^d = 11 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 3^c = 3 \\ 5^d = 5 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} a = 2\cdot c = 2 \\ b = 2\cdot d = 2 \end{matrix} \right.$$

Assim, a única solução é: (a,b) = (2,2).

OPÇÃO A

10) NMPQ = Q + 10P + 100M + 1000N
MNPQ = Q + 10P + 100N + 1000M
NMPQ – MNPQ = 900N – 900M = 900 (N – M)
Como N e M são inteiros, é divisível por M – N.

OPÇÃO B

11) Para determinarmos o algarismo das unidades simples, basta calcularmos o resto da divisão do número pedido por 10.
3^4 = 81 deixa resto 1 quando dividido por 10.
$3^{2010} = (3^4)^{502} . 3^2 = 9$, logo 3^{2010} deixa resto 9 quando dividido por 10.
Logo 4 . 3^{2010} = 4 . 9 = 36 que deixa resto 6 quando dividido por 10.

OPÇÃO C

12) Em uma divisão, temos que:
DIVIDENDO = DIVISOR . QUOCIENTE + RESTO
Logo,
P = D . Q + R (I)
Q = Q' . D' + R' (II)
Substituindo II em I:
P = D . (Q' . D' + R') + R
P = D . Q' . D' + D . R' + R
O resto é D . R' + R

OPÇÃO B

13) $60^2 . 10^{-1} = 6b + r$

$r = 360 - 6b$

o resto de uma divisão, satisfaz a seguinte desigualdade:

$0 \leq r \leq b$, onde b é o divisor. Portanto,

$0 \leq 360 - 6b \leq b$, somando 6b a cada termo da desigualdade, temos:

$6b \leq 360 \leq 7b$.

$6b \leq 360 \rightarrow b \leq 60$

$7b \geq 360 \rightarrow b \geq 51{,}42...$

Logo $b \in \{ 52, 53, 54, ..., 58, 59, 60 \}$

$S = \dfrac{(52+60).9}{2} = 56 . 9 = 504$

OPÇÃO D

14) Dividindo tudo por $x^8 : 1+3\dfrac{y^4}{x^8} = 4\dfrac{y^3}{x^6} \Leftrightarrow 3\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^4 - 4\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^3 + 1 = 0.$ Seja $z = \dfrac{y}{x^2} : 3z^4 - z^3 + 1 = 0.$ Fatorando, teremos $(z-1)^2 + \left(3z^2 + 2z + 1\right) = 0.$ A única raiz racional dessa equação é $z = 1$, portanto deveremos ter $y = x^2$ para satisfazer a equação com *x* e *y* inteiros positivos. Pela limitação $1 \leq y \leq 2007$, y pode assumir todos os valores de quadrados perfeitos nesse intervalo, que são $1^2, 2^2, 3^2, ..., 44^2$, totalizando 44 pares ordenados.

OPÇÃO E

15) Temos $x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow x - y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow x - y = \dfrac{y-x}{xy},$ mas podemos cancelar a diferença, que é diferente de zero, então $1 = \dfrac{-1}{xy} \Leftrightarrow xy = -1.$

OPÇÃO C

16) Como $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $0 \leq a^3 + a < b - b^3 \rightarrow b^3 < b \Leftrightarrow b^2 < 1 \Leftrightarrow b < 1$. Também temos $a < a^3 + a < b - b^3 < b \Leftrightarrow a < b$ e assim $a < b < 1$.

OPÇÃO D

17) Em primeiro lugar, veja que cada termo do produto é do tipo $\dfrac{(k+1)^4 + (k+1)^2 + 1}{k^4 + k^2 + 1}$. Além disso, podemos escrever

$$x^4 + x^2 + 1 = \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) - x^2 = \left(x^2 + 1\right)^2 - x^2 = \left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right).$$

Assim, ficamos com $\dfrac{(k+1)^4 + (k+1)^2 + 1}{k^4 + k^2 + 1} = \dfrac{\left[(k+1)^2 - (k+1) + 1\right].\left[(k+1)^2 + (k+1) + 1\right]}{\left(k^2 - k + 1\right)\left(k^2 + k + 1\right)}.$ Agora, veja que

$(k + 1)^2 - (k + 1) + +1 = k^2 + k + 1$ e $k^2 - k + 1 = (k - 1)^2 + (k - 1) + 1$. Logo, a última expressão fica

$$\frac{(k+1)^4 + (k+1)^2 + 1}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 1}{(k-1)^2 + (k-1) + 1}.$$

Logo, o produto pedido é igual a $\dfrac{2^2 + 2 + 1}{0^2 + 0 + 1}.\dfrac{4^2 + 4 + 1}{2^2 + 2 + 1}.\dfrac{6^2 + 6 + 1}{4^2 + 4 + 1}.....\dfrac{32^2 + 32 + 1}{30^2 + 30 + 1} = 32^2 + 32 + 1 = 1057.$

OPÇÃO C

18) Se $x^2 - y^2 = 2^{2010} \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 2^{2010}$. Cada fator é inteiro e deve ser uma potência de 2: $x - y = 2^a$ e $x + y = 2^b$ com $a + b = 2010$ e a < b. Resolvendo o sistema, $x = 2^{b-1} - 2^{a-1}$ e $y = 2^{b-1} + 2^{a-1}$, assim precisamos ter também a condição $a \geq 1$ para que as soluções sejam inteiras. Os possíveis pares (a, b) são (1, 2009), (2, 2008), (3, 2007), ..., (1003, 1007) e (1004, 1006), e como cada par (a, b) leva a um par (x, y) de forma única, temos no total 1004 soluções.

OPÇÃO E

19) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$5(x + y) = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$(x^2 - xy + y^2) = 5$

$4 - xy = 5$

$-xy = 1$

$xy = -1$

OPÇÃO E

20) $\dfrac{\left(x^3 + y^3 + z^3\right)^2 - \left(x^3 - y^3 - z^3\right)^2}{y^3 + z^3}$

Vamos utilizar o produto notável:

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

$$\frac{\left(x^3 + y^3 + z^3 + x^3 - y^3 - z^3\right)\left(x^3 + y^3 + z^3 - x^3 + y^3 + z^3\right)}{y^3 + z^3}$$

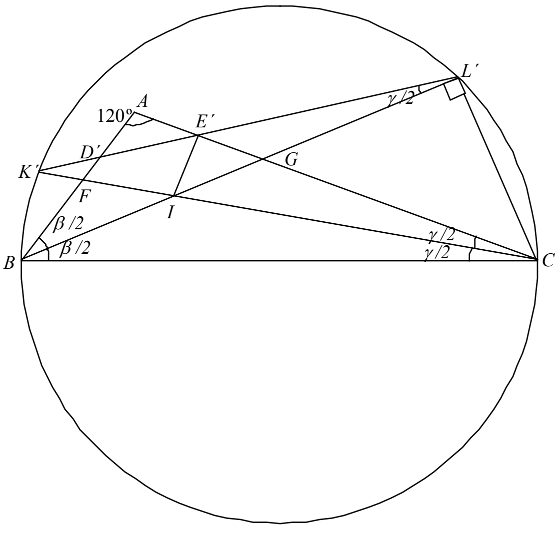
$$\frac{\left(2x^3\right)\left(2y^3 + 2z^3\right)}{y^3 + z^3}$$

$$\frac{\left(2x^3\right)2\left(y^3 + z^3\right)}{y^3 + z^3}$$

$4x^3$

OPÇÃO A

21) Vamos mostrar inicialmente que *BL* e *CK* são as bissetrizes dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ do ΔABC. Para isto, sejam K´ e L´ as intersecções das bissetrizes de $\widehat{C}$ e $\widehat{B}$ com a circunferência de diâmetro $\overline{BC}$, como na figura. Seja ainda *I* o incentro de ΔABC e β e Υ as medidas de $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente, de modo que $\beta + \Upsilon = 60°$



Sejam D' e E' as intersecções de $\overline{K'L'}$ com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo. Para mostrar que $\overline{K'L'} = \overline{K'L'}$ basta mostrar que E' e D' são as projeções ortogonais de *I* aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$. Como $\overline{BC}$ é diâmetro, temos que $\measuredangle$ BL'C

é reto, assim se mostrarmos que o quadrilátero IE'L'C é cíclico, provaremos que IE'C é reto, e analogamente para *D´*.
Denote por *F* e *G* os encontros das bissetrizes de $\hat{C}$ e $\hat{B}$ com os lados opostos. Temos

$$m\left(G\hat{I}C\right)=m\left(F\hat{I}B\right)=m\left(A\hat{F}C\right)-m\left(F\hat{B}I\right)=\beta+\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}=\frac{\beta+\gamma}{2}=30°.$$

da mesma forma, temos

$$m\left(G\widehat{E'}L'\right)=m\left(B\hat{G}A\right)-m\left(GL'E'\right)$$

$$=\frac{\beta}{2}+\gamma-\frac{\gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{2}=30°$$

pois $m\left(GL'E'\right)=m\left(B\widehat{L'}K'\right)=m\left(B\hat{C}K'\right)$ já que ambos os ângulos subtendem o mesmo arco $\widehat{BK'}$. Assim, provando que IE´L´C é cíclico.
Sendo O o ponto médio de BC, temos

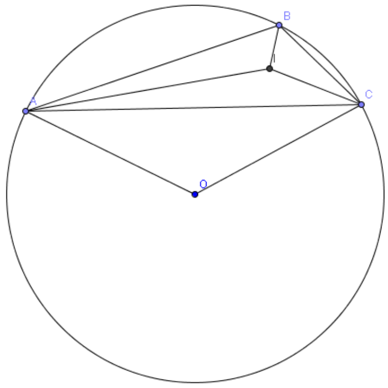
$$m\left(K\hat{O}L\right)=180°-m\left(L\hat{O}C\right)-m\left(K\hat{O}B\right)$$

$$=180°-\beta-\gamma=120°$$

Assim a distância pedida é $LO\cdot cos\frac{m\left(L\hat{O}K\right)}{2}=\frac{BC}{2}\cdot cos\,60°=3\ cm.$

OPÇÃO C

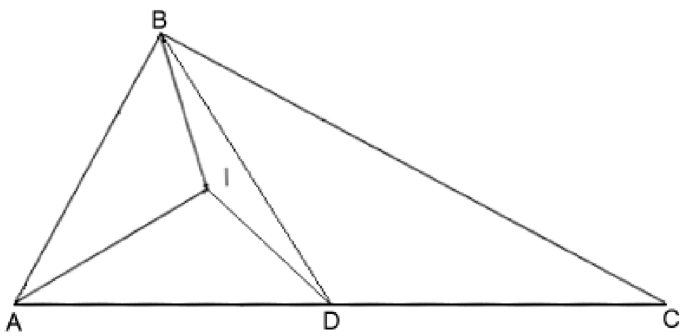
22)



Como $\angle ABC = 110°$, então $\angle AOC = 140°$ e com isso $\angle OAC = 20°$ Por outro lado, $\angle IAC = 10°$. Portanto, $\angle IAO = 30°$.

OPÇÃO C

23)



Como *ABC* é um triângulo retângulo, então *AO* = *BO* = *CO*. Se $\angle ABI = \angle AOI = 45^o$ e $\angle BAI = \angle OAI$, então $\Delta ABI\ \Delta AOI$ (ALA). Com isso, *AB* = *AO* = *BO*, e portanto, triângulo *ABO* é equilátero. Assim, $\angle ACB = 30^o$.

OPÇÃO A

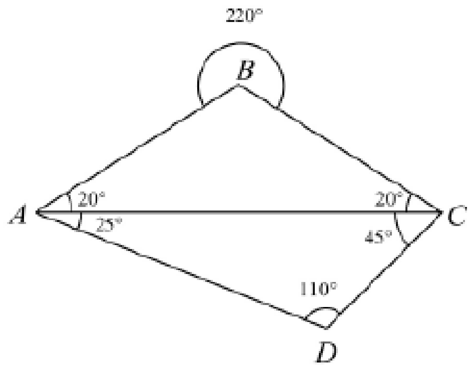
24) Temos $AB = BC$ e o ângulo exterior $\angle ABC$ é igual a $2\times\angle ADC$. Isso implica que o ponto B é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ADC. Dessa forma, $\angle DBC = 2\times\angle DAC = 50°$.

OPÇÃO C

25) $\frac{AG}{AD} = \frac{1}{2}$

$\frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}$ $\underset{LAL}{\Leftrightarrow} \Delta DAB \approx \Delta GAF$, com razão de semelhança 2.

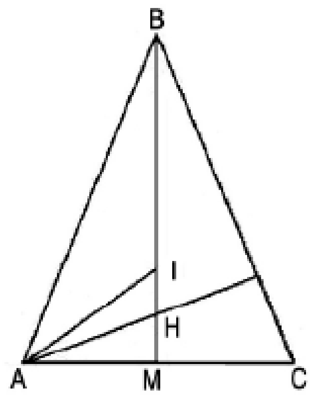
$\angle DAB = 60^o + \angle GAB = \angle GAF$



Portanto $\frac{BD}{FG} = 2$.

OPÇÃO D

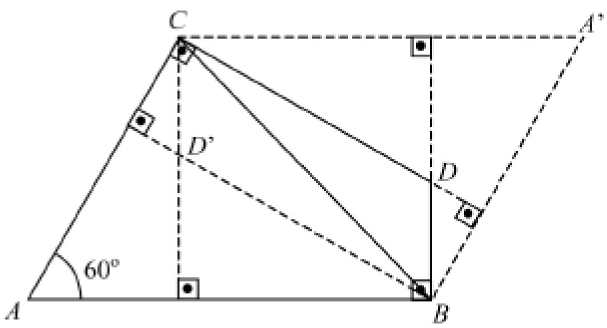
26)



Como o triângulo é isósceles concluímos que, $\angle CBM = \angle ABM$ e $\angle ACB = 90° - \alpha$, com isso, $\angle CAQ = \alpha$, pois AQ é uma altura. Como *AI* é bissetriz, então $\angle CAI = \angle IAB = 2\alpha$. Finalmente no ΔAMB: $\alpha + \alpha + 2\alpha + \alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 18°$.

OPÇÃO A

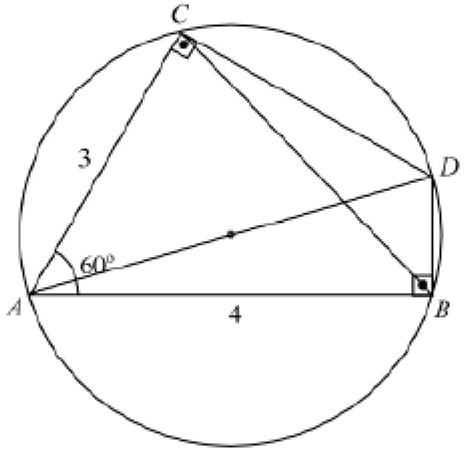
27) Sejam *A*' o ortocentro do triângulo *BCD* e *D*' o ortocentro do triângulo *ABC*.



Como as retas *CD*' e *BD* são ambas perpendiculares a *AB*, são paralelas. Analogamente, as retas *BD*' e *CD* são paralelas. Logo o quadrilátero *BDCD*' é um paralelogramo e, portanto, os triângulos *BCD* e *BD'C* são congruentes.

Da mesma maneira, as retas *AB* e *CA'* são paralelas, pois são perpendiculares a *BD*. Analogamente, as retas *AC* e *BA*' são paralelas. Logo o quadrilátero *CABA*' é um paralelogramo e, assim, os triângulos *ABC* e *A'CB* são congruentes. Consequentemente, os quadriláteros *ABDC* e *A'CD'B* são congruentes, de modo que a distância entre os ortocentros *A'D'* é igual a *AD*.

Devemos, então, calcular *AD*. Como os ângulos $A\hat{B}D$ e $A\hat{C}D$ são ambos retos, somam 180° e, portanto, o quadrilátero *ABCD* é inscritível, sendo *AD* diâmetro de seu circuncírculo.



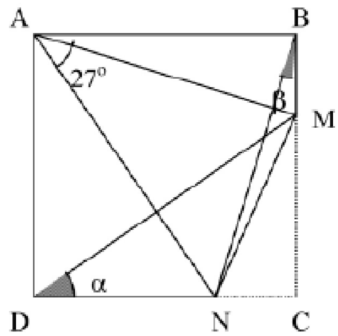
Pela lei dos co-senos,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos 60° \Leftrightarrow BC^2 = 4^2 + 3^2 - 2.4.3.\frac{1}{2} \Leftrightarrow BC = \sqrt{13}$$

Enfim, pela lei dos senos, $AD = 2R = \dfrac{BC}{\text{sen}60°} = \dfrac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{39}}{3}$ e, portanto, a distância entre os ortocentros é $\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$.

OPÇÃO B

28) Vamos denotar por A, B, C e D os vértices do quadrado e por MN o corte efetuado. Como CM + CN = BC = CD, resulta que BM = CN e DN = MC. Em consequência, os triângulos ADN e DCM são congruentes, o mesmo ocorrendo com ABM e BCN (em cada caso, os triângulos são retângulos e possuem catetos iguais). Logo, DÂN = CDM = a e BÂM = CBN = b. Assim, a + b + 27° = 90° e a + b = 63°.



OPÇÃO A